Sui gruppi $(P)_{360}$, $(\Pi)_{360}$ della figura di sei complessi lineari di rette due a due in involuzione.

(*Nota di* G. VERONESE, *a Padova.*)

1. La presente Nota serve a completare le mie ricerche su questi gruppi della Memoria precedente, intitolata: *Interprétations géométriques de la théorie des substitutions de n lettres,* ecc. Al capitolo III di essa ho dimostrato che se si scambiano in tutte le maniere possibili i 6 complessi fondamentali $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_6 = 0$ di KLEIN, un punto dà origine ad un gruppo di 360 punti $(P)_{360}$, cui è legato un gruppo di 360 piani $(\Pi)_{360}$ (*).

Se si fa corrispondere il punto z_1, z_2, z_3, z_4 alla retta $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$, che si ottiene unendo questo punto con un altro di coordinate z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, alla retta $x_2 x_1 x_4 x_3 x_6 x_5$ corrisponde il piano $-z_1$, z_2, z_3, z_4.

Secondo il teorema CLXXXVIII della mia Memoria i 360 punti di $(P)_{360}$ sono situati 15 a 15 sui 360 piani di $(\Pi)_{360}$, e reciprocamente questi passano 15 a 15 per i 360 punti.

Per ottenere le rette corrispondenti ai 15 punti P situati sopra uno dei 360 piani Π, per es. sul piano $-z_1$, z_2, z_3, z_4, basta operare sugli indici delle coordinate della retta ad esso corrispondente le 15 sostituzioni della forma (ik), ove i, k sono due indici differenti della serie 1, 2, 3, 4, 5, 6 (**). Uno di questi punti è il punto iz_2, iz_1, $-z_4$, z_3, essendo $i = \sqrt{-1}$ (***).

A pag. 227 ho indicato con $S^{(ab)}$, $S'^{(ab)}$ i poli di un piano di sezione Π rispetto ai due complessi $x_a \pm x_b = 0$. Questi punti si possono costruire facilmente,

(*) Come ha osservato anche il KLEIN nel suo scritto: *Ueber eine geom. Repräsentation der Resolventen.* Math. Annalen, Bd. 4, 1871.

(**) A., l. c., Nota (1), pag. 220-221.

(***) Ib., Nota (2), pag. 219.

poichè dividono armonicamente il segmento dei punti a, b fondamentali dell'esagrammo dato dai 6 poli del piano rispetto ai 6 complessi $x_1=0,\ldots, x_6=0$, ed inoltre dividono armonicamente il segmento dei punti $T^{(ab)}$, $T'^{(ab)}$ determinati dall'incontro del lato ab con le direttrici dei due complessi $x_a=0$, $x_b=0$, ossia con una qualunque delle coniche Σ_{abc}, Σ_{abd}, Σ_{abe}, Σ_{abf}, che sono le intersezioni del piano Π con le superficie fondamentali corrispondenti di Klein.

Se il piano Π coincide col piano $-z_1$, z_2, z_3, z_4, i poli $S^{(12)}$, $S'^{(12)}$ rispetto ai due complessi $x_1 \pm x_2=0$ [dalla nota (2) pag. 221] sono:

$$iz_2, \quad iz_1, \quad z_4, \quad -z_3; \qquad iz_2, \quad iz_1, \quad -z_4, \quad z_3.$$

Il secondo di questi punti è il punto P sopra trovato, quindi i 15 punti $S'^{(ab)}$ altro non sono che i punti P, dunque:

I 15 *punti* P *di un piano* Π *sono i poli di esso rispetto ai* 15 *complessi* $x_a - x_b = 0$.

Se si considerano i tre complessi

$$x_1 - x_2 = 0, \qquad x_2 - x_3 = 0, \qquad x_3 - x_1 = 0 \tag{1}$$

è chiaro che appartengono ad un fascio, vale a dire che i tre poli del piano Π rispetto ad essi sono situati in linea retta. Siccome poi coi 15 complessi $x_a - x_b = 0$ si possono formare 20 gruppi (1), così abbiamo:

I 15 *punti* P *di un piano* Π *sono situati tre a tre su* 20 *rette, che passano quattro a quattro per i* 15 *punti.*

I poli del piano rispetto ai complessi $x_1 - x_2 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$, $x_3 + x_1 = 0$ sono pure situati in linea retta, dunque:

I tre punti P *e i tre punti* $S^{(ab)}$ *situati sui lati di un triangolo, che ha per vertici tre qualunque dei* 6 *punti fondamentali dell'esagrammo, per es.* 123, *sono i vertici di un quadrilatero.*

I punti P *e* $S^{(ab)}$ *formano in tutto* 20 *di tali quadrilateri.*

Pel punto P polo del piano rispetto a $x_1 - x_2 = 0$ passano dunque le 8 rette che congiungono i poli del piano Π rispetto ai complessi

$$\begin{aligned} x_2 \pm x_3 &= 0, \qquad & x_3 \pm x_1 &= 0 \\ x_2 \pm x_4 &= 0, & x_4 \pm x_1 &= 0 \\ x_2 \pm x_5 &= 0, & x_5 \pm x_1 &= 0 \\ x_2 \pm x_6 &= 0, & x_6 \pm x_1 &= 0. \end{aligned}$$

Pel punto $S^{(12)}$ passano le 8 rette che congiungono i poli del piano rispetto ai complessi

$$\begin{array}{ll} x_3 \mp x_1 = 0, & x_3 \pm x_2 = 0, \\ x_4 \mp x_1 = 0, & x_4 \pm x_2 = 0, \\ x_5 \mp x_1 = 0, & x_5 \pm x_2 = 0, \\ x_6 \mp x_1 = 0, & x_6 \pm x_2 = 0, \end{array}$$

dunque:

I 15 *punti P e i* 15 *punti* $S^{(ab)}$ *sono situati* 3 *a* 3 *in* 80 *rette le quali passano* 8 *a* 8 *per ciascuno di essi.*

Questa figura non è analoga a quella dei 30 punti $T^{(ab)}$, $T'^{(ab)}$ poichè questi giaciono tre a tre in 60 rette, che passano 6 a 6 per ciascuno di essi (*). Essa invece ha una certa analogia con quella che si ottiene projettando sopra un piano la figura formata dai 30 punti $P_0^{(ik)}$, $P'^{(ik)}_0$ dello spazio a 5 dimensioni, le cui coordinate sono della forma 1, ∓ 1, 0, 0, 0, 0 (**).

2. Operando sulla retta $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ corrispondente al punto z_1, z_2, z_3, z_4 le sostituzioni del gruppo di una coppia di punti conjugati di Steiner, per es. G_{123}, G_{456}, i 360 punti e i 360 piani si separano in 10 gruppi di 36 punti e 36 piani $(P)_{36}$, $(\Pi)_{36}$. I 36 punti sono situati 6 a 6 sui 36 piani, e questi passano 6 a 6 per ciascuno di essi (***). Così per es. sul piano corrispondente alla retta $x_2 x_1 x_4 x_3 x_6 x_5$ sono situati i 6 punti corrispondenti alle rette:

$$\begin{array}{lll} x_2 x_3 x_4 x_1 x_6 x_5, & x_2 x_1 x_4 x_5 x_6 x_3, & x_2 x_5 x_4 x_3 x_6 x_1, \\ x_6 x_1 x_4 x_3 x_2 x_5, & x_4 x_1 x_2 x_3 x_6 x_5, & x_2 x_1 x_6 x_3 x_4 x_5, \end{array}$$

che si ottengono operando sugli indici di $x_2 x_1 x_4 x_3 x_6 x_5$ le trasposizioni (13), (35), (15); (26), (24), (46), essendo 135 oppure 246 gli indici fissi negli esagoni delle rette di Pascal dei due punti G_{123}, G_{456} (****).

Applicando invece le sostituzioni di un punto di Steiner, per es. G_{123} o G_{456} (*****) sugli indici della retta $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ si ottiene un gruppo di 18 punti e di 18 piani contenuto nel gruppo precedente, in modo che questo si separa in due gruppi di 18 punti e di 18 piani, che indico con $(P)_{18}$, $(\Pi)_{18}$; $(P)'_{18}$, $(\Pi)'_{18}$. Ma siccome nel gruppo di un punto di Steiner non c'è alcuna sostituzione della forma (ik), così è chiaro che nessuno dei 18 punti di $(P)_{18}$

(*) A., l. c., n.º 83.
(**) Ib., n.º 74.
(***) Ib., Nota (2), pag. 223 e Errata-corrige.
(****) Ib., pag. 144-145.
(*****) Ib., pag. 184, XVIII.

è situato sopra alcuno dei 18 piani di $(\Pi)_{18}$. La stessa cosa accade per i due gruppi $(P)'_{18}$, $(\Pi)'_{18}$; dunque per ciò che precede i 18 punti di $(P)_{18}$ devono essere situati 6 a 6 sui 18 piani di $(\Pi)'_{18}$, che passano 6 a 6 per quei 18 punti. Analogamente pei punti e piani di $(P)'_{18}$ e $(\Pi)_{18}$. Si osserva inoltre che partendo dalla retta $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ le rette corrispondenti ai punti di $(P)_{18}$ e ai piani di $(\Pi)_{18}$ sono date dalle permutazioni pari e dispari delle rette di Pascal 123456, 125634, 163254 del punto G_{123}, mentre quelle dei punti e dei piani di $(P)'_{18}$ e $(\Pi)'_{18}$ sono date dalle permutazioni pari e dispari delle rette di Pascal 125436, 145632, 165234 del punto G_{456}.

Abbiamo visto che nel piano di $(\Pi)_{18}$ corrispondente alla retta $x_2 x_1 x_4 x_3 x_6 x_5$ giaciono i punti relativi alle rette:

$$x_2 x_3 x_4 x_1 x_6 x_5, \qquad x_2 x_1 x_4 x_5 x_6 x_3, \qquad x_2 x_5 x_4 x_3 x_6 x_1,$$
$$x_6 x_1 x_4 x_3 x_2 x_5, \qquad x_4 x_1 x_2 x_3 x_6 x_5, \qquad x_2 x_1 x_6 x_3 x_4 x_5,$$

che appartengono al gruppo $(P)'_{18}$. Per i primi tre punti passano anche i piani corrispondenti alle rette

$$x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_1, \qquad x_2 x_5 x_4 x_1 x_6 x_3$$

e per i tre ultimi

$$x_6 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5, \qquad x_4 x_1 x_6 x_3 x_2 x_5$$

i quali appartengono al gruppo $(\Pi)_{18}$, come risulta dalle rette di Pascal del punto G_{123}. Dunque si ha:

Uno qualunque dei $10 \cdot 10$ *gruppi di* 36 *punti* P *e* 36 *piani* Π, *che si ottengono da* $(P)_{360}$, $(\Pi)_{360}$ *con i gruppi di sostituzioni delle* 10 *coppie di punti conjugati di* Steiner, *si separa in due gruppi di* 18 *punti e* 18 *piani, che non passano per alcuno dei* 18 *punti. Esso si separa pure in due altri gruppi di* 18 *punti e* 18 *piani, i quali passano* 6 *a* 6 *per i* 18 *punti, mentre questi giaciono* 6 *a* 6 *sui* 18 *piani.*

I 18 *punti di uno qualunque di questi ultimi due gruppi giaciono tre a tre su* 12 *rette, per le quali passano tre a tre i* 18 *piani.*

3. Interpretiamo ora geometricamente le sostituzioni della forma (12), (12)(34), (12)(34)(56), (123).

a) Operando sulla retta $x_2 x_1 x_3 x_4 x_5 x_6$ la sostituzione (12) si ottiene la retta $x_2 x_1 x_3 x_4 x_5 x_6$, che è la conjugata della prima rispetto al complesso $x_1 - x_2 = 0$. Infatti le formole di trasformazione fra due rette conjugate rispetto ad un complesso $\Sigma a_i x_i = 0$ sono

$$\rho x_1 = - x'_1 (a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 - a_1^2) + 2 a_1 (a_2 x'_2 + a_3 x'_3 + a_4 x'_4 + a_5 x'_5 + a_6 x'_6), \text{ ecc. } (*)$$

(*) A., l. c., Nota (1), pag. 215-217.

quindi nel nostro caso basta porre

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = -1, \qquad a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0.$$

Da ciò risulta che il punto e il piano corrispondenti alle due rette sono polo e piano polare rispetto al complesso $x_1 - x_2 = 0$.

Le direttrici dei due complessi $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ si trasformano una nell'altra, le direttrici invece dei complessi $x_3 = 0$, $x_4 = 0$; $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, che hanno per coordinate

$$0,\ 0,\ 1,\ \pm i,\ 0,\ 0; \qquad 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ \pm i$$

corrispondono a sè stesse, ossia appartengono al complesso $x_1 - x_2 = 0$.

b) Per la sostituzione (12)(34) dalla retta $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ si passa alla retta $x_2 x_1 x_4 x_3 x_5 x_6$. Se alla prima corrisponde il punto z_1, z_2, z_3, z_4, alla seconda corrisponde il punto iz_3, z_4, iz_1, $-z_2$ (*); *questi due punti sono conjugati rispetto alla superficie*

$$\theta_{12} \equiv x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6 = 0,$$

che riferita al tetraedro θ_{12} dato dalle direttrici dei complessi $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; $x_3 = 0$, $x_4 = 0$; $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, ha per equazione:

$$-y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0.$$

Ma le due rette non sono conjugate rispetto a questa superficie, perchè la conjugata della prima è $x_2 x_1 x_4 x_3 x_6 x_5$ (**). Quando dunque il primo punto si muove in una retta, il secondo percorre una retta, che non è però la conjugata della prima rispetto a θ_{12}, *mentre due piani corrispondenti sono conjugati rispetto alla stessa superficie.*

È chiaro che *la superficie* θ_{12} *corrisponde a sè stessa nell'omografia* (12)(34). I punti uniti cadono quindi su essa e i piani uniti sono tangenti ad essa in questi punti.

Il tetraedro $\theta_{12} \equiv 12 \cdot 34 \cdot 56$ *si trasforma in sè medesimo.*

Se indichiamo con $A_1 A_2$, $A_3 A_4$; $A_1 A_3$, $A_2 A_4$; $A_1 A_4$, $A_2 A_3$ le tre coppie di direttrici dei complessi $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; $x_3 = 0$, $x_4 = 0$; $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, che formano il tetraedro θ_{12}, noi vediamo che le rette $A_1 A_4$, $A_2 A_3$ corrispondono a sè stesse, mentre $A_1 A_2$ e $A_1 A_3$ si trasformano rispettivamente in $A_3 A_4$, $A_2 A_4$. Dunque i punti d'incontro *delle due direttrici dei complessi* $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ *con la superficie* θ_{12} *e i piani tangenti condotti ad essa sono i punti e i piani uniti dell'omografia* (12)(34).

(*) A., l. c., Nota (2), pag. 219.
(**) Ib., Nota (1), pag. 219.

Si ha pure che *la superficie e il tetraedro* θ_{12} *si trasformano in sè stessi anche nelle omografie* (12)(56), (34)(56).

c) Nella reciprocità (12)(34)(56) dalla retta $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ si passa alla retta $x_2x_1x_4x_3x_6x_5$, che è la conjugata della prima rispetto alla superficie θ_{12}. Il punto corrispondente alla prima è il polo del piano corrispondente alla seconda rispetto a θ_{12}.

d) Le tre rette $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$, $x_2x_3x_1x_4x_5x_6$, $x_3x_1x_2x_4x_5x_6$, che si corrispondono nell'omografia ciclica (123), sono conjugate della retta $x_2x_1x_3x_4x_5x_6$ rispetto ai complessi

$$x_1 - x_2 = 0, \qquad x_2 - x_3 = 0, \qquad x_3 - x_1 = 0.$$

I tre punti corrispondenti a quelle tre rette sono situati sopra una retta, e sono i poli del piano relativo alla retta $x_2x_1x_3x_4x_5x_6$ rispetto ai tre complessi. Le direttrici di essi sono:

$$\begin{matrix} 1 & r & r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r^2 & r & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

ove r è una radice cubica primitiva dell'unità (*). Dunque:

I tre punti corrispondenti nell'omografia ciclica (123) *sono situati sopra una retta e formano un gruppo equianarmonico coi due punti d'incontro di essa con le direttrici dei tre complessi* $x_1 - x_2 = 0$, $x_2 - x_3 = 0$, $x_3 - x_1 = 0$.

4. Noi possiamo utilizzare ora queste interpretazioni per dedurre altre proprietà dei punti e piani di $(P)_{360}$ e $(\Pi)_{360}$.

I 24 punti $(P)_{\Delta 12}$ e i 24 piani $(\Pi)_{\Delta 12}$, dati dalle 48 sostituzioni del gruppo del triangolo $\Delta \equiv 12 \cdot 34 \cdot 56$ dell'esagrammo o del tetraedro θ_{12} (**), formano 6 tetraedri conjugati rispetto alla superficie θ_{12} (***), ciò che risulta anche dalle interpretazioni (*c*) e (*b*) del numero precedente essendovi nel gruppo Δ_{12} le sostituzioni (12)(34)(56) e (12)(34), (12)(56), (34)(56). Ma in questo gruppo oltre queste sostituzioni ci sono anche le sostituzioni (13)(24)(56), (15)(34)(26), (12)(35 (46), (12)(36)(45), (16)(25)(34), (14)(23)(56) e (13)(24), (15)(26), (35)(46), (36)(45), (16)(25), (14)(23), che corrispondono ai triangoli Δ_{34}, Δ_{35}, Δ_{36}, Δ_{45}, Δ_{46}, Δ_{56} (****), dunque:

(*) A., l. c., Nota (1), pag. 215. Le direttrici del fascio $\Sigma a_i x_i + \mu \Sigma a'_i x_i = 0$ sono date dalla formola $\mu^2 \Sigma a_i^2 + 2\mu \Sigma a_i a'_i + \Sigma a'^2_i = 0$.

(**) Ib., pag. 177.

(***) Ib., Teor. CLXXXVII.

(****) Ib., pag. 143.

I 24 punti $(P)_{\Delta_{12}}$ *e i 24 piani* $(\Pi)_{\Delta_{12}}$ *formano due figure polari reciproche rispetto alle superficie* θ_{34}, θ_{35}, θ_{36}, θ_{45}, θ_{46}, θ_{56}, *e 6 tetraedri conjugati rispetto alla superficie* θ_{12}. *Essi sono due a due conjugati rispetto alle stesse superficie* θ_{34}, θ_{35}, θ_{36}, θ_{45}, θ_{46}, θ_{56}.

Nel gruppo di una retta di Pascal, per es. $123456 = \Delta_{12}\Delta_{13}$ (*) sono contenute le sostituzioni (14)(25)(36), (16)(25)(34), (14)(23)(56), (12)(36)(45) e inoltre (15)(24), (13)(46), (26)(35). Le prime quattro corrispondono ai triangoli Δ_{23}, Δ_{46}, Δ_{56}, Δ_{45}, le altre ai triangoli Δ_{16}, Δ_{15}, Δ_{14}, dunque:

I 6 punti e i 6 piani di $(P)_{360}$ e $(\Pi)_{360}$, *determinati dal gruppo della retta di* Pascal $\Delta_{\alpha\beta}\ \Delta_{\alpha\gamma}$, *formano due figure polari reciproche rispetto alle superficie* $\theta_{\beta\gamma}$, $\theta_{\varepsilon\delta}$, $\theta_{\varepsilon\lambda}$, $\theta_{\delta\lambda}$ *(ove* α, β, γ, δ, ε, λ *sono identici, salvo l'ordine, agli indici* 123456). *Essi sono due a due conjugati rispetto alle superficie* $\theta_{\alpha\delta}$, $\theta_{\alpha\varepsilon}$, $\theta_{\alpha}\lambda$.

Con analoghe considerazioni si ottiene dal gruppo di un punto di Steiner:

I 18 punti e i 18 piani di $(P)_{360}$, $(\Pi)_{360}$, *determinati dalle sostituzioni del gruppo di un punto di* Steiner $G_{\alpha\beta\gamma}$, *formano due figure polari reciproche rispetto alle* 6 *superficie* $\theta_{\alpha\beta}$, $\theta_{\alpha\gamma}$, $\theta_{\beta\gamma}$, $\theta_{\delta\varepsilon}$, $\theta_{\delta\lambda}$, $\theta_{\varepsilon\lambda}$, *date dalle sostituzioni* $(ab)(cd)(ef)$ *del gruppo. Essi sono due a due conjugati rispetto alle* 9 *superficie* $\theta_{\alpha\beta}$ *rimanenti, date dalle sostituzioni* $(ab)(cd)$ *del gruppo.*

I 18 punti e i 18 piani formano anche 6 *cicli projettivi di tre punti o di tre piani sia rispetto alle direttrici dei complessi* $x_1 - x_3 = 0$, $x_3 - x_5 = 0$, $x_5 - x_1 = 0$, *sia rispetto alle direttrici dei complessi* $x_2 - x_4 = 0$, $x_4 - x_6 = 0$, $x_6 - x_2 = 0$.

Per il gruppo di una figura Π si ha:

I 60 punti o i 60 piani di $(P)_{360}$ *e* $(\Pi)_{360}$, *che si ottengono dal gruppo di una figura* Π, per es. *I*, *determinano* $5 \cdot 15$ *tetraedri conjugati* 15 *a* 15 *rispetto alle superficie* θ_{12}, θ_{13}, θ_{14}, θ_{15}, θ_{16}. *I 60 punti e i 60 piani formano due figure polari reciproche rispetto alle* 10 *superficie* θ *restanti.*

E finalmente dal gruppo di un punto di Kirkman:

I 6 punti e i 6 piani di $(P)_{360}$ *e* $(\Pi)_{360}$ *determinati dal gruppo di un punto di* Kirkman $\Delta_{\alpha\beta}$, $\Delta_{\alpha\gamma}$, $\Delta_{\alpha\delta}$ *formano due figure polari reciproche rispetto alle* 4 *superficie* $\theta_{\beta\gamma}$, $\theta_{\beta\delta}$, $\theta_{\gamma\delta}$, $\theta_{\varepsilon\lambda}$, *e sono due a due conjugati rispetto alle superficie* $\theta_{\alpha\beta}$, $\theta_{\alpha\gamma}$, $\theta_{\alpha\delta}$.

Padova, febbrajo 1883.

(*) A., l. c., pag. 178.